BEMERKUNGEN

ÜBER GEWISSE

NÄHERUNGSBRÜCHE

ALGEBRAISCHER ZAHLEN

VON

AXEL THUE

(Videnskabs-Selskabets Skrifter. I. Math.-Naturv. Klasse. 1908. No. 3)

UDGIVET FOR FRIDTJOF NANSENS FOND.

CHRISTIANIA

IN COMMISSION BEI JACOB DYBWAD

1908

Fremlagt i Møde i den math.-naturv. Klasse 22de Nov. 1907.

A. W. BRØGGERS BUCHDRUCKEREI

§ 1.

Wir wollen zuerst durch ein einfaches Beispiel eine Methode zeigen, wodurch man die Werte algebraischer Grössen annäherungsweise bestimmen kann.

Ist z. B.

$$x = \sqrt[3]{k}$$

wo k eine ganze positive Zahl bedeutet, so können wir Näherungswerte für x, wenn x irrational ist, auf folgende Weise finden.

Sind n und m zwei beliebige ganze positive Zahlen, so gibt es $(2n+1)^2\,(2m+1)$ verschiedene Ausdrücke $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, wo α, β und γ solche ganze Zahlen sind, dass

$$|\alpha| \overline{\gtrless} n \qquad |\beta| \overline{\gtrless} n \qquad |\gamma| \overline{\gtrless} m$$

Von diesen Ausdrücken müssen folglich mindestens zwei existieren, deren Differenz positiv und kleiner als

$$2 \cdot \frac{(x^2+x)\,n+m}{(2n+1)^2\,(2m+1)-1} \quad \text{ist.}$$

Indem wir hier $m = \infty$ setzen können, erkennen wir, dass wir immer im Stande sind, drei solche ganze Zahlen $A\,B\,C$ zu finden, dass

$$0 < Ax^2 + Bx + C < \frac{1}{(2n+1)^2}$$

während

$$|A| \overline{\gtrless} 2n \qquad |B| \overline{\gtrless} 2n$$

$$|C| < 2n\,(x^2+x)+1 = N$$

Indem

$$|A| < N, \quad |B| < N, \quad |C| < N \text{ und } ABC \lesseqgtr 0$$

können wir ferner drei ganze Zahlen p, q und r finden, die erstens der Gleichung

$$Ap + Bq + Cr = 0$$

Genüge leisten, und zweitens so klein sind, dass

$$|p| \leqq \sqrt{N} + 1 \qquad |q| \leqq \sqrt{N} + 1$$

während

$$|r| \leqq 2\,[\sqrt{N} + 1]$$

wenn z. B.

$$|A| \leqq |C| \geqq |B|$$

Sind nämlich s und t zwei beliebige ganze positive Zahlen, so finden sich $(2s+1)^2(2t+1)$ verschiedene Ausdrücke $Aa + Bb + Cc$, wo

$$|a| \leqq s \qquad |b| \leqq s \qquad |c| \leqq t$$

Es gibt daher drei Zahlen p, q, r für welche

$$0 \leqq Ap + Bq + Cr \leqq 2\,\frac{N(2s+t)}{(2s+1)^2(2t+1)-1}$$

während

$$|p| \leqq 2s \qquad |q| \leqq 2s$$

$$|r| \leqq 2t$$

Setzen wir hier

$$t = \infty$$

$$2s + 1 > \sqrt{N} \leqq 2s - 1$$

so werden

$$|p| \leqq 1 + \sqrt{N} \qquad |q| \leqq 1 + \sqrt{N}$$

$$0 \leqq Ap + Bq + Cr < 1$$

Da $Ap + Bq + Cr$ eine ganze Zahl ist, muss folglich

$$Ap + Bq + Cr = 0$$

wo

$$r \leqq 2\,[\sqrt{N} + 1]$$

Addiert man die Gleichungen

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C &= \varepsilon \\ Bx^2 + Cx + kA &= \varepsilon x \\ Cx^2 + kAx + kB &= \varepsilon x^2 \end{aligned}$$

nachdem man sie beziehungsweise mit p, q und r multipliziert hat, erhält man

$$[pB + qC + rkA]\,x + [pC + qkA + rkB] = \varepsilon\,[p + qx + rx^2] = \mu$$

wo der Koeffizient von x, wenn x irrational ist, nicht Null sein kann.

Es sei n eine ganze positive Zahl und

$$x = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{y}}$$

wo y eine positive oder negative, aber von Null verschiedene ganze Zahl bedeutet.

Wir merken uns dann die Gleichung

$$y^k (x-1)^{(k+1)n-1} = A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-1} x + A_n =$$

$$= \frac{1}{y^{(k+1)(n-1)}} \left[\alpha + \beta \frac{1}{y} + \gamma \frac{1}{y^2} + \cdots \right] \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

wo die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, nur von n und von der beliebig gewählten ganzen positiven Zahl k abhängen, während jede der Grössen A eine ganze Funktion von y vom Grade k mit ganzzahligen Koeffizienten wird.

Man erkennt gleich, dass wir, um Näherungswerte für x zu finden, mit Vorteil unsere Methode auf diese Gleichung anwenden können.

Doch wollen wir uns hier nicht damit beschäftigen; wir wollen lieber gleich eine andere Anwendung des obenstehenden Gedankens zeigen.

§ 2.

Wir setzen

$$F(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$$

$$F(x) = 0$$

wo die Koeffizienten a rationale Grössen sind.

Ist dann

$$r = \frac{2m+1}{n-2}$$

wo m und r ganze positive Zahlen sind, so können wir in den n Gleichungen

$$A_h(y) = b_0^h y^m + b_1^h y^{m-1} + \ldots + b_{m-1}^h y + b_m^h$$

$$h = 1, 2, 3, \ldots, n$$

die Koeffizienten b als solche ganze Funktionen der Koeffizienten a bestimmen, dass man für alle Werte von y erhält die Gleichung

$$x\,P(y) - Q(y) = (x-y)^r [A_1(y) x^{n-1} + A_2(y) x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}(y) x + A_n(y)]$$

wo $P(y)$ und $Q(y)$ in Bezug auf y ganze Funktionen $m+r$'ten Grades werden, während ihre Koeffizienten ganze Funktionen der Koeffiizenten a sind.

In der Gleichung

$$(x-y)^r[A_1(y)x^{n-1}+A_2(y)x^{n-2}+\ldots+A_n(y)]=$$

$$=B_1(y)x^{n-1}+B_2(y)x^{n-2}+\ldots+B_n(y)$$

wo der Grad jeder Funktion B gleich $m+r$ ist, kann man nämlich — jedenfalls im allgemeinen — die $(m+1)n$ Koeffizienten b so wählen, dass sämtliche $(m+r+1)(n-2)$ Koeffizienten von $B_1(y)$, $B_2(y)$, ..., $B_{n-2}(y)$, die alle homogenen linearen Funktionen der Grössen b sind, Null werden.

Denn

$$(m+1)n-1=(m+r+1)(n-2).$$

Indem nun x eine positive Wurzel einer irreduktiblen ganzen Funktion $F(z)$ bedeutet, wollen wir voraussetzen, dass man immer unendlich viele positive Zahlenpaare p und q finden kann, für welche die Grössen h und k in den Gleichungen

$$|qx-p|=\frac{h}{q}$$

$$\left|q^nF\left(\frac{p}{q}\right)\right|=k$$

unter einer festen Grenze liegen.

Für diese Zahlen p und q erhält man

$$qx-p=\frac{1}{sq^{n-1}}$$

wo s zwischen zwei von Null verschiedenen Grenzen liegt.

Wir setzen jetzt

$$y=\frac{p}{q}$$

und erhalten dann

$$x\left[q^{m+r}P\left(\tfrac{p}{q}\right)\right]-\left[q^{m+r}Q\left(\tfrac{p}{q}\right)\right]=$$

$$=(qx-p)^r\left[\left(q^mA_1\left(\tfrac{p}{q}\right)\right)x^{n-1}+\left(q^mA_2\left(\tfrac{p}{q}\right)\right)x^{n-2}+\ldots+\left(q^mA_n\left(\tfrac{p}{q}\right)\right)\right]$$

oder

$$x\,.\,N_{(p,q)}-M_{(p,q)}=(qx-p)^r\left[C_{1(p,q)}x^{n-1}+C_{2(p,q)}x^{n-2}+\ldots+C_{n(p,q)}\right]$$

wo C_1, C_2, etc. in Bezug auf p und q ganze homogene Funktionen m'ten Grades sind, während N und M ganze homogene Funktionen $m+r$'ten Grades derselben Variablen bedeuten.

Wir erhalten somit die folgende Gleichung

$$xN - M = \frac{1}{R}$$

wo N und M solche ganze positive Zahlen sind, dass α und β in den Gleichungen

$$N = \alpha q^{m+r}$$

$$|R| = \beta q^{m+r+1}$$

zwischen zwei von p und q unabhängigen und von Null verschiedenen Grenzen liegen.

Ist z. B.

$$x^3 = ax + b$$

und

$$m = 1$$

so erhält man:

$$[(9b^2 - a^3)q^4 + 6abq^3p + 6a^2q^2p^2 + 18bqp^3 + 3ap^4]\,x$$

$$-[a^2bq^4 + 18b^2q^3p + 18abq^2p^2 + 8a^2qp^3 + 9bp^4] =$$

$$= [qx - p]^3\,[-9aqx^2 + (9bq - 3ap)\,x + (8a^2q + 9bp)].$$

Wir wollen uns indessen für den allgemeinsten Fall mit diesen kurzen Andeutungen begnügen.

Dagegen werden wir im folgenden eingehender gewisse Näherungsbrüche von x untersuchen, wenn

$$x = \sqrt[r]{k}$$

wo r und k positive rationale Grössen sind.

§ 3.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, solche ganze Funktionen $C(x)$ von x, wo x beliebig ist, zu finden, dass die ganze Funktion $(x-1)^m\,C(x)$ nur Potenzexponenten von x von der Form rh und $rh+1$ enthält.

Indem r eine beliebige ganze positive Zahl > 1 bedeutet, setzen wir

$$A_1(x^r) = x^r + \frac{r+1}{r-1}$$

$$B_1(x^r) = \frac{r+1}{r+1} x^r + 1$$

In der Gleichung

$$x\,A_1(x^r) - B_1(x^r) = (x-1)^3\,R(x)$$

muss dann $R(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $r-2$ sein.

Denn wir haben ja:

$$\left[xA_1(x^r) - B_1(x^r)\right]_{x=1} = \left[x\left(x^r + \frac{r+1}{r-1}\right) - \left(\frac{r+1}{r-1}\,x^r + 1\right)\right]_{x=1} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left[xA_1(x^r) - B_1(x^r)\right]_{x=1} = \left[(r+1)\,x^r + \frac{r+1}{r-1} - r\,\frac{r+1}{r-1}\,x^{r-1}\right]_{x=1} = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[xA_1(x^r) - B_1(x^r)\right]_{x=1} = \left[r\,(r+1)\,x^{r-1} - (r-1)\,r\,\frac{r+1}{r-1}\,x^{r-2}\right]_{x=1} = 0$$

Ferner bekommt man

$$\left(\frac{1}{x} - 1\right)^3 R\left(\tfrac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\,A_1\left(\tfrac{1}{x^r}\right) - B_1\left(\tfrac{1}{x^r}\right)$$

oder

$$(1-x)^3\left[x^{r-2}R\left(\tfrac{1}{x}\right)\right] = -x\left[x^r B_1\left(\tfrac{1}{x^r}\right)\right] + \left[x^r A_1\left(\tfrac{1}{x^r}\right)\right] =$$

$$-xA_1(x^r) + B_1(x^r) = -(x-1)^3\,R(x)$$

oder

$$R(x) = x^{r-2}\,R\left(\tfrac{1}{x}\right) \cdot$$

Satz 1.

Ist x eine beliebige variable Grösse und n eine beliebige ganze positive Zahl, während $C_n(x)$ durch die Gleichungen

$$C_0(x) = 1$$

$$C_1(x) = R(x)$$

$$C_{m+2}(x) = h_{m+2}\,\frac{r^2\,C_m(1)\,(x^r+1)\,C_{m+1}(x) - 2C_{m+1}(1)\left(\frac{x^r-1}{x-1}\right)^2 C_m(x)}{(x-1)^2} \quad \ldots.(2)$$

definiert ist, indem h_{m+2} eine willkürlich gewählte, von x unabhängige Konstante bedeutet, so muss $C_n(x)$ immer eine solche ganze Funktion von x vom Grade $(r-2)n$ sein, dass

$$C_n(x) = x^{(r-2)n}\, C_n\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \ldots\ldots (3)$$

Indem der Satz ja richtig ist für $n = 0$ und $n = 1$, brauchen wir nur zu zeigen, dass der Satz auch richtig wird für $n = m + 2$, wenn er für $n = m$ und $n = m + 1$ richtig wäre.

Bedeutet n eine beliebige der Zahlen m und $m + 1$, so erhält man von (3):

$$\frac{d}{dx} C_n(x) = (r-2)n\, x^{(r-2)n-1}\, C_n\left(\frac{1}{x}\right) - x^{(r-2)n-2} \cdot \frac{\partial C_n\left(\frac{1}{x}\right)}{\partial\left(\frac{1}{x}\right)}$$

oder

$$C_n'(1) = \frac{(r-2)n}{2}\, C_n(1)$$

Wir können nun mit Hülfe dieser Gleichung sehr leicht beweisen, dass $C_{m+2}(x)$ eine ganze Funktion ist.

Setzt man nämlich

$$r^2 C_m(1)\,(x^r + 1)\, C_{m+1}(x) - 2C_{m+1}(1) \left(\frac{x^r - 1}{x - 1}\right)^2 C_m(x) = T(x)$$

$$r^2 C_m(1)\,[(x^r + 1)\, C_{m+1}'(x) + r x^{r-1} C_{m+1}(x)] -$$

$$2C_{m+1}(1) \left[\left(\frac{x^r - 1}{x - 1}\right)^2 C_m'(x) + 2\left(\frac{x^r - 1}{x - 1}\right)(1 + 2x + \ldots (r-1)\, x^{r-2})\, C_m(x)\right] = T'(x)$$

so erhält man ja

$$T(1) = 2r^2\, C_m(1)\, C_{m+1}(1) - 2r^2\, C_{m+1}(1)\, C_m(1) = 0$$

$$T'(1) = r^2\, C_m(1)\, [(r-2)(m+1)\, C_{m+1}(1) + r\, C_{m+1}(1)] -$$

$$- 2C_{m+1}(1) \left[r^2 \frac{(r-1)m}{2}\, C_m(1) + 2r\, \frac{r(r-1)}{2}\, C_m(1)\right] = 0$$

$T(x)$ ist also durch $(x - 1)^2$ teilbar, und $C_{m+2}(x)$ somit eine ganze Function vom Grade $(r-2)(m+2)$.

Ferner ist

$$x^{(r-2)(m+2)}\, C_{m+2}\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= h_{m+2} \cdot x^{(r-2)(m+2)} \cdot \frac{r^2\, C_m(1) \left(\frac{1}{x^r} + 1\right) C_{m+1}\left(\frac{1}{x}\right) - 2\, C_{m+1}(1) \left(\frac{\frac{1}{x^r} - 1}{\frac{1}{x} - 1}\right)^2 C_m\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2} =$$

$$= h_{m+2} \cdot \frac{r^2 C_m(1)(1+x^r)\left[x^{(r-2)(m+1)} C_{m+1}\left(\frac{1}{x}\right)\right] - 2 C_{m+1}(1) \left(\frac{1-x^r}{1-x}\right)^2 \left[x^{(r-2)m} C_m\left(\frac{1}{x}\right)\right.}{(1-x)^2}$$

$$= h_{m-2} \frac{r^2 C_m(1)(x^r+1) C_{m+1}(x) - 2C_{m+1}(1) \left(\frac{x^r-1}{x-1}\right)^2 C_m(x)}{(x-1)^2} = C_{m-2}(x)$$

Satz 2.

Wenn die ganzen Funktionen $A_n(z)$ und $B_n(z)$ von z vom Grade n durch die Gleichungen

$$A_0(z) = 1 \qquad\qquad B_0(z) = 1$$

$$A_1(z) = z + \frac{r+1}{r-1} \qquad B_1(z) = \frac{r+1}{r-1} z + 1$$

$$A_{m+2}(z) = h_{m+2}\left[r^2 C_m(1)(z+1) A_{m+1}(z) - 2C_{m+1}(1)(z-1)^2 A_m(z)\right]$$

$$B_{m+2}(z) = h_{m+2}\left[r^2 C_m(1)(z+1) B_{m+1}(z) - 2C_{m+1}(1)(z-1)^2 B_m(z)\right]$$

definiert sind, so erhält man die Gleichung

$$x \,.\, A_n(x^r) - B_n(x^r) = (x-1)^{2n+1} C_n(x) \qquad \ldots\ldots (4)$$

Diese Gleichung ist jedenfalls richtig, wenn $n = 0$ oder $n = 1$ ist.

Wir haben also nur nötig zu zeigen, dass die Gleichung auch richtig wird für $n = m+2$, wenn sie es ist für $n = m$ und für $n = m+1$.

Wir haben ja, dass:

$$xA_{m+2}(x^r) - B_{m+2}(x^r) = h_{m+2}[r^2 C_m(1)(x^r+1)[xA_{m+1}(x^r) - B_{m+1}(x^r)] - 2C_{m+1}(1)(x^r-1)^2[xA_m(x^r) -$$

$$= h_{m+2}[r^2 C_m(1)(x^r+1)(x-1)^{2m+3} C_{m+1}(x) - 2C_{m+2}(1)(x^r-1)^2 (x-1)^{2m+1} C_m(x)] =$$

$$= h_{m+2} \frac{r^2 C_m(1)(x^r+1) C_{m+1}(x) - 2C_{m+1}(1) \left(\frac{x^r-1}{x-1}\right)^2 C_m(x)}{(x-1)^2} (x-1)^{2(m+2)+1} =$$

$$= (x-1)^{2(m+2)+1} C_{m+2}(x)$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) ersieht man sofort, dass

$$B_n(z) = z^n A\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \ldots\ldots (5)$$

§ 4.

Satz 3.

Sind die Funktionen $U_n(z)$ durch die Gleichung

(6) . . . . . .
$$U_n(z) =$$
$$+ \frac{n}{1}\frac{rn+1}{r-1} z^{n-1} + \dots + \binom{n}{k}\frac{(rn+1)(r[n-1]+1)\dots(r[n-k+1]+1)}{(r-1)(2r-1)\dots(kr-1)} z^{n-k} + \dots$$

definiert, so bekommt man

$$U_{m+2}(z) = \frac{r\,[2m+3]\,(z+1)\,U_{m+1}(z) - [r\,(m+1)+1]\,(z-1)^2\,U_m(z)}{r\,(m+2)-1}$$

Um dies zu beweisen bemerken wir, dass der Koeffizient von z^{m-k+2} auf der rechten Seite der Gleichung (7) wird gleich

$$\frac{r\,(2m+3)}{r\,(m+2)-1}\left[\begin{matrix}\binom{m+1}{k}\dfrac{[r\,(m+1)+1]\dots[r\,(m-k+2)+1]}{(r-1)\quad\dots\quad(kr-1)} + \\ + \binom{m+1}{k-1}\dfrac{[r\,(m+1)+1]\dots[r\,(m-k+3)+1]}{(r-1)\quad\dots\quad[(k-1)\,r-1]}\end{matrix}\right]$$

$$-\frac{r\,(m+1)+1}{r\,(m+2)-1}\left[\begin{matrix}\binom{m}{k}\dfrac{(rm+1)\dots\dots[r\,(m-k+1)+1]}{(r-1)\dots\dots(kr-1)} - \\ -2\binom{m}{k-1}\dfrac{(rm+1)\dots\dots[r\,(m-k+2)+1]}{(r-1)\dots\dots[(k-1)\,r-1]} + \\ + \binom{m}{k-2}\dfrac{(rm+1)\dots\dots[r\,(m-k+3)+1]}{(r-1)\dots\dots[(k-2)\,r-1]}\end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{r\,(m+2)-1}\cdot\left[\frac{m(m-1)\dots(m-k+3)}{1\,.\,2\,.\,3\;\dots\;k}\cdot\frac{[r\,(m+1)+1]\dots[r(m-k+3)+1]}{(r-1)\quad\dots\quad kr-1)}\right] N$$

$$N =$$

$$= r\,(2m+3)\,[(m+1)\,(m-k+2)\,[r\,(m-k+2)+1] + (m+1)\,k\,(kr-1)]$$

$$-[(m-k+2)\,(m-k+1)\,[r\,(m-k+2)+1]\,[r\,(m-k+1)+1]$$

$$-2(m-k+2)\,[r\,(m-k+2)+1]\,k\,(kr-1) + k\,(k-1)\,[(k-1)\,r-1]\,[kr-1]] =$$

$$= (m+2)\,(m+1)\,[r\,(m+2)-1]\,[r\,(m+2)+1]$$

Hierdurch ist der Satz somit bewiesen.

Setzt man

$$W_n(z) = z^n U\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \ldots\ldots (8)$$

so erkennt man gleich, dass

$$(9) \ldots\ldots \qquad W_{m+2}(z) =$$

$$= \frac{r\,[2m+3]\,(z+1)\,W_{m+1}(z) - [r\,(m+1)+1]\,(z-1)^2\,W_m(z)}{r\,(m+2)-1}$$

Satz 4.

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[x U_n(x^r)\right] = (rn+1)\,(rn)\,x^{r-1}\,U_{n-1}(x^r) \qquad \ldots\ldots (10)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[W_n(x^r)\right] = (rn+1)\,(rn)\,x^{r-1}\,W_{n-1}(x^r) \qquad \ldots\ldots (11)$$

Diese Gleichungen lassen sich unmittelbar aus den Definitionen der Funktionen U und W ableiten.

Satz 5.

$$2rz\,\frac{d}{dz}\,U_n(z) = (rn-1)\,U_n(z) + (rn+1)\,(z-1)\,U_{n-1}(z) \qquad \ldots\ldots (12)$$

$$2rz\,\frac{d}{dz}\,W_n(z) = (rn+1)\left[W_n(z) + (z-1)\,W_{n-1}(z)\right] \qquad \ldots\ldots (13)$$

Diesen Satz kann man direkt aus den Definitionen der Funktionen U und W erledigen.

Man kann ihn auch durch folgende Betrachtungen beweisen.

Nach (8), (10) und (11) bekommt man

$$W_n(z) = x^{rn} U_n\left(\frac{1}{z}\right)$$

wo

$$z = x^r$$

oder

$$\frac{d}{dx}\,W_n(z) = rnx^{rn-1}U_n\left(\frac{1}{z}\right) - rx^{r(n-1)-1}\,\frac{\partial}{\partial\left(\frac{1}{z}\right)}\,U_n\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} W_n(z) =$$

$$- 1)\, x^{rn-2} U_n\left(\tfrac{1}{z}\right) - [r\,(2n-1)-1]\, x^{r(n-1)-2} \frac{\partial}{\partial\left(\frac{1}{z}\right)} U_n\left(\tfrac{1}{z}\right) + r x^{r(n-2)-2} \frac{\partial^2}{\partial\left(\frac{1}{z}\right)^2} U_n\left(\tfrac{1}{z}\right)\Big] =$$

$$= (rn+1)\, rn\, x^{r-2} W_{n-1}(z)$$

oder

$$n\,(rn-1)\, U_n(z) - [r\,(2n-1)-1]\, z \frac{d}{dz} U_n(z) + r z^2 \frac{d^2}{dz^2} U_n(z) =$$

$$= (rn+1)\, n z^{n-1} W_{n-1}\left(\tfrac{1}{z}\right) = (rn+1)\, n\, U_{n-1}(z) \qquad \ldots\ldots (\alpha)$$

Aber ferner ist

$$\frac{d}{dx}\left[x\, U_n(z)\right] = U_n(z) + rz \frac{d}{dz} U_n(z)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[x\, U_n(z)\right] = r x^{r-1}\left[(r+1) \frac{d}{dz} U_n(z) + rz \frac{d^2}{dz^2} U_n(z)\right]$$

$$= (rn+1)\,(rn)\, x^{r-1}\, U_{n-1}(z)$$

oder

$$rz \frac{d^2}{dz^2} U_n(z) + (r+1) \frac{d}{dz} U_n(z) = (rn+1)\, n\, U_{n-1}(z) \qquad \ldots\ldots (\beta)$$

Durch Elimination von $\frac{d^2}{dz^2} U_n(z)$ erhält man nun (12) aus den Gleichungen (α) und (β).

Aus (12) erhält man ferner

$$2r \frac{1}{z} \frac{d}{d\left(\frac{1}{z}\right)} U_n\left(\tfrac{1}{z}\right) = (rn-1)\, U_n\left(\tfrac{1}{z}\right) + (rn+1)\left(\tfrac{1}{z}-1\right) U_{n-1}\left(\tfrac{1}{z}\right)$$

oder

$$2 r z^{n-1} \frac{d}{d\left(\frac{1}{z}\right)} U_n\left(\tfrac{1}{z}\right) = (rn-1)\, W_n(z) - (rn+1)\,(z-1)\, W_{n-1}(z) \quad \ldots.(\gamma)$$

Ferner wird

$$W_n(z) = z^n \, U_n\left(\tfrac{1}{z}\right)$$

oder

$$\frac{d}{dz} W_n(z) = n z^{n-1} U_n\left(\tfrac{1}{z}\right) - z^{n-2} \frac{d}{d\left(\frac{1}{z}\right)} U_n\left(\tfrac{1}{z}\right)$$

oder

$$-2rz \frac{d}{dz} W_n(z) = -2rn \, W_n(z) + 2rz^{n-1} \frac{d}{d\left(\frac{1}{z}\right)} U_n\left(\tfrac{1}{z}\right) \quad \ldots . (\delta)$$

Durch Addition von (γ) und (δ) geht nun (13) hervor.

Aus den Gleichungen (8), (10), (11), (12) und (13) können wir die Gleichungen (7) und (9) auf die einfachste Weise ableiten.

Um z. B. (9) zu beweisen kann man so vorgehen:

$$\frac{d}{dx} W_n(z) = \frac{d}{dz} W_n(z) \, r x^{r-1}$$

oder

$$2x \frac{d}{dx} W_n(z) = 2rz \frac{d}{dz} W_n(z) =$$

$$= (rn+1)\left[W_n(z) + (z-1) W_{n-1}(z)\right]$$

$$\frac{d}{dx}\left[2x \frac{d}{dx} W_n(z)\right] =$$

$$= 2x \frac{d^2}{dx^2} W_n(z) + 2 \frac{d}{dx} W_n(z) =$$

$$= (rn+1)\left[\frac{d}{dx} W_n(z) + (z-1) \frac{d}{dx} W_{n-1}(z) + r x^{r-1} W_{n-1}(z)\right]$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $2x$, so erhält man wegen (11) und (13):

$$4(rn+1)(rn) z \, W_{n-1}(z) - (rn-1)(rn+1)\left[W_n(z) + (z-1) W_{n-1}(z)\right] =$$

$$= (rn+1)\left[(z-1)\left[r(n-1)+1\right]\left[W_{n-1}(z) + (z-1) W_{n-2}(z)\right] + 2rz \, W_{n-1}(z)\right]$$

oder

$$(rn-1) W_n(z) = r(2n-1)(z+1) W_{n-1}(z) - \left[r(n-1)+1\right](z-1)^2 W_{n-2}(z)$$

was zu beweisen wäre.

Satz 6.

Wenn n eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, bekommt man die Gleichung

$$x U_n(x^r) - W_n(x^r) = (x-1)^{2n+1} R_n(x) \qquad \ldots\ldots(14)$$

wo $R_n(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $(r-2)n$ in Bezug auf x wird.

Ferner muss $R_n(x)$ symmetrisch sein, d. h.

$$R_n(x) = x^{(r-2)n} R_n\left(\tfrac{1}{x}\right) \qquad \ldots\ldots(15)$$

Wenn $R_n(x)$ durch die Gleichung (14) definiert ist, so sieht man aus (7) und (9) zuerst gleich ein, dass

$$R_{m+2}(x) = \frac{r[2m+3]\,[x^r+1]\,R_{m+1}(x) - [r(m+1)+1]\left[\frac{x^r-1}{x-1}\right]^2 R_m(x)}{[r(m+2)-1]\,(x-1)^2} \qquad \ldots\ldots(16)$$

Wie oben gezeigt, ist Satz (6) richtig für die Fälle $n=0$ und $n=1$.

Um nun zu zeigen, dass er auch gültig bleibt für die anderen Werte von n, nehmen wir an, dass der Satz richtig ist, wenn $n=m$ und $n=m+1$, und wollen wir dann beweisen, dass er auch ferner seine Gültigkeit bewährt, wenn $n=m+2$.

Wie im Beweise des Satzes (1) gezeigt, wird es genügend sein darzutun, dass

$$\frac{r\,[2m+3]}{r(m+1)+1} = \frac{r^2 R_m(1)}{2R_{m+1}(1)} \qquad \ldots\ldots(\alpha)$$

Vorausgesetzt dass $n=m+1$, erhalten wir aus (14)

$$\frac{d}{dx}\,[x U_n(x^r) - W_n(x^r)] = (2n+1)(x-1)^{2n} R_n(x) + (x-1)^{2n+1} R_n'(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\,[x U_n(r) - W_n(x^r)] =$$

$$= (2n)(2n+1)(x-1)^{2n-1} R_n(x) + 2(2n+1)(x-1)^{2n} R_n'(x) + (x-1)^{2n+1} R_n''(x)$$

Infolge der Gleichungen (10) und (11) ist aber

$$\frac{d^2}{dx^2}\,[(x-1)^{2n+1} R_n(x)] = \frac{d^2}{dx^2}\,[x U_n(x^r) - W_n(x^r)] =$$

$$= (rn+1)(rn)\,x^{r-2}\,[x U_{n-1}(x^r) - W_{n-1}(x^r)] =$$

$$= (rn+1)(rn)\,x^{r-2}(x-1)^{2n-1} R_{n-1}(x)$$

oder

$$(2n)(2n+1)R_n(x) + 2(2n+1)(x-1)R_n'(x) + (x-1)^2 R_n''(x) =$$
$$= (rn+1)(rn)x^{r-2} R_{n-1}(x) \qquad \ldots\ldots(17)$$

Setzt man hier $x = 1$, erhält man

$$2(2n+1)R_n(1) = (rn+1)r R_{n-1}(1) \qquad \ldots\ldots(18)$$

oder

$$2[2m+3]R_{m+1}(1) = r[r(m+1)+1]R_m(1)$$

Hiermit ist also unsere obige Behauptung nachgewiesen.

Die Gleichung (18) gilt somit auch für alle positiven ganzen Werte von n.

Dass $xU_n(x^r) - W_n(x^r)$ durch $(x-1)^{2n+1}$ teilbar ist, sieht man indessen direkt aus den Gleichungen (10) und (11).

Satz 7.

Sollen $A_n(z)$ und $B_n(z)$ in der Gleichung

$$xA_n(x^r) - B_n(x^r) = (x-1)^{2n+1} C_n(x) \qquad \ldots\ldots(19)$$

ganze Funktionen vom Grade n in Bezug auf z sein, während $C_n(x)$ eine solche ganze Funktion von x sein soll, dass ihr Grad nicht grösser als $(r-2)n$ sein wird, dann bekommt man die allgemeinste Lösung der Gleichung, wenn man setzt

$$C_n(x) = hR_n(x)$$

wo h eine beliebige Konstante bedeutet.

Zuerst leuchtet nämlich ein, dass der Grad von $C_n(x)$ in der Gleichung (19) nicht niedriger als $(r-2)n-1$ sein kann, da die linke Seite der Gleichung vom Grade $rn+1$ oder rn ist.

War nun $C_n(x)$ vom Grade $(r-2)m-1$, so bekam man die Gleichung

$$B_n(x^r) = (x-1)^{2n+1} C_n(x)$$

Diese Gleichung ist aber unmöglich. Wir haben nämlich

$$B_n(x^r) = (x^r-1)B_n'(x^r) + a = (x-1)^{2n+1} C_n(x)$$

wo $B_n'(x)$ eine ganze Funktion und a eine Konstante ist. Setzt man $x = 1$, sieht man ein, dass $a = o$, oder dass

$$B_n'(x^r) = (x-1)^{2n} \frac{C_n(x)}{\frac{x^r-1}{x-1}} = (x-1)^{2n} G(x)$$

wo $G(x)$ eine ganze Funktion wird.

Durch Wiederholung dieses Verfahrens erhielt man zuletzt die unmögliche Gleichung

$$b = (x-1)^{n+1} F(x)$$

wo $F(x)$ eine ganze Funktion in Bezug auf x ist, während b der Koeffizient von x^{rn} in $B_n(x^r)$ bedeutet.

Existierte endlich eine solche ganze Funktion $C_n(x)$ vom Grade $(r-2)n$, die der Gleichung (19) Genüge leistete, dass sie nicht die Form $hR_n(x)$ hätte, so fand es sich jedenfalls einen kleinsten Wert m von n, bei dem dies möglich war. m muss folglich grösser als Null sein.

Bedeutet nun k der Koeffizient von $x^{(r-2)m}$ in $C_m(x)$, so bekamen wir durch Subtraktion die Gleichung

$$xN(x^r) - M(x^r) = (x-1)^{2m+1} \left[R_m(x) - \frac{C_m(x)}{k} \right] = (x-1)^{2m+1} S(x)$$

wo die ganze Funktion $S(x)$ in Bezug auf x höchstens vom Grade $(r-2)m-1$ wird, während die ganzen Funktionen $N(z)$ und $M(z)$ in Bezug auf z höchstens vom Grade m werden.

Der Grad von $N(z)$ und $M(z)$ kann indessen, wie oben gezeigt ist, nicht m sein.

Man bekommt folglich eine Gleichung

$$xN(x^r) - M(x^r) = (x-1)^{2s+1} \,.\, T(x)$$

wo $N(z)$ und $M(z)$ in Bezug auf z vom Grade $s < m$ sind, während $T(x)$ in Bezug auf x eine ganze Funktion vom Grade $(r-2)s$ wird.

Wegen der Voraussetzung über die Zahl m muss folglich

$$T(x) = t \,.\, R_s(x)$$

wo t eine Konstante bedeutet.

Da $s < m$ ist, muss ferner $T(x)$ und also auch $R_s(x)$ durch $(x-1)$ teilbar sein.

Dies wird aber wegen der Gleichung (18) unmöglich.

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Satz 8.

$$(20)\ldots\ldots \quad 2x(x-1)\,R_n'(x) = [x(n[r-4]-1)-(rn+1)]\,R_n(x) + (rn+1)\,\frac{x^r-1}{x-1}\,R_{n-1}(x)$$

Aus den Gleichungen (12), (13) und (14) erhalten wir nämlich:

$$z = x^r$$

$$x\,U_n(z) - W_n(z) = (x-1)^{2n+1}\,R_n(x)$$

$$x\,\frac{d}{dz}\,U_n(z)\,[rx^{r-1}] + U_n(z) - \frac{d}{dz}\,W_n(z)\,[rx^{r-1}] = (x-1)^{2n+1}\,R_n'(x) + (2n+1)(x-1)^{2n}\,R_n(x)$$

oder

$$x\left[2rz\,\frac{d}{dz}\,U_n(z) + 2\,U_n(z)\right] - 2rz\,\frac{d}{dz}\,W_n(z) = 2x\,[x-1)^{2n+1}\,R_n'(x) + (2n+1)(x-1)^{2n}\,R_n(x)] =$$

$$= x\,[(rn-1)\,U_n(z) + (rn+1)(z-1)\,U_{n-1}(z) + 2\,U_n(z)] - (rn+1)\,[W_n(z) + (z-1)\,W_{n-1}(z)]$$

$$= (rn+1)\,[x\,U_n(z) + (z-1)\,x\,U_{n-1}(z) - W_n(z) - (z-1)\,W_{n-1}(z)] =$$

$$= (rn+1)\,[(x\,U_n(z) - W_n(z)) + (z-1)\,(x\,U_{n-1}(z) - W_{n-1}(z))] =$$

$$= (rn+1)\,[(x-1)^{2n+1}\,R_n(x) + (z-1)(x-1)^{2n-1}\,R_{n-1}(x)]$$

Satz 9.

Sämtliche Koeffizienten der ganzen Funktionen $R_n(x)$ sind positiv.

Um diesen für unsere späteren Untersuchungen wichtigen Satz zu beweisen brauchen wir nur zu zeigen, dass

$$\left[\frac{d^m R_n(x)}{dx^m}\right]_{x=0}$$

für alle posititiven ganzen Werte von n und m positiv ist.

Durch eine p malige Derivation von der Gleichung (17) erhält man:

$$(21)\ldots\ldots \quad (rn+1)(rn)\,\frac{d^p}{dx^p}\left[x^{r-2}R_{n-1}(x)\right] =$$

$$= (2n+p+1)(2n+p)\,R_n^p(x) + 2\,(2n+p+1)(x-1)\,R_n^{p+1}(x) + (x-1)^2\,R_n^{p+2}(x)$$

Aus (21) bekommt man z. B.

$$(2n+p+1)(2n+p)\,R_n^p(1) = (rn+1)(rn)\,\frac{d^p}{dx^p}\left[x^{r-2}R_{n-1}(x)\right]_{x=1}$$

Wir wollen aber lieber zu unserem Zwecke in (21) x gleich Null setzen.

Wir erhalten dann

$$(2n+p+1)(2n+p)R_n^p(0) - 2(2n+p+1)R_n^{p+1}(0) + R_n^{p+2}(0) =$$

$$= (rn+1)(rn)\frac{d^p}{dx^p}\left[x^{r-2}R_{n-1}(x)\right]_{x=0}$$

Setzen wir hier

$$(2n+p)R_n^p(0) - R_n^{p+1}(0) = H_p^n \qquad \ldots\ldots(22)$$

so erhalten wir die einfache Gleichung

$$(2n+p+1)H_p^n - H_{p+1}^n = (rn+1)(rn)\frac{d^p}{dx^p}\left[x^{r-2}R_{n-1}(x)\right]_{x=0} \qquad \ldots\ldots(23)$$

Aus (22) bekommt man z. B.

$$rn\,R_n^{(r-2)n}(0) - R_n^{(r-2)n+1}(0) = H_{(r-2)n}^n$$

oder

$$(24)\ldots\ldots \qquad H_{(r-2)n}^n = rn\,[1.2.3.4\ldots\ldots[(r-2)n]] > 0$$

Sind folglich sämtliche Koeffizienten von $R_{n-1}(x)$ positive Grössen, so werden nach (23) und (24) H_p^n immer grösser als Null, wenn

$$0 \gtreqless p \gtreqless (r-2)n$$

Dagegen wird nach (22) $H_p^n = 0$, wenn

$$p > (r-2)n$$

Da indessen $R_n^{(r-2)n}(0) = 1.2.3\ldots.[(r-2)n] > 0$, während alle Grössen H_p^n positiv sind, so müssen infolge der Gleichung (22) auch alle Grössen $R_n^p(0)$ positiv werden.

Sind folglich alle Koeffizienten der ganzen Funktion $R_{n-1}(x)$ positive Grössen, so haben die Koeffizienten von $R_n(x)$ dieselbe Eigenschaft.

Als $R_0(x) = 1$, so ist unserer Satz hiermit bewiesen.

Satz 10.

$$W_{n+1}(z)\,U_n(z) - W_n(z)\,U_{n+1}(z) = 2\,\frac{(r+1)(2r+1)\ldots\ldots(rn+1)}{(r-1)(2r-1)\ldots\ldots[(n+1)r-1]}\,(z-1)^{2n+1} \quad \ldots\ldots (25)$$

Aus (7) und (9) bekommt man nämlich

$$W_{n+1}(z)\,U_n(z) - W_n(z)\,U_{n+1}(z) = \frac{rn+1}{r(n+1)-1}\left[W_n(z)\,U_{n-1}(z) - W_{n-1}(z)\,U_n(z)\right](z-1)^2$$

Ferner wird

$$W_1(z)\,U_0(z) - W_0(z)\,U_1(z) = \frac{2}{r-1}\,(z-1)$$

Aus (25) und (14) erhält man

$$(25')\ldots\ldots \quad U_{n+1}(z)\,R_n(x) - (x-1)^2\,U_n(z)\,R_{n+1}(x) =$$

$$= 2\,\frac{1.\,(r+1)(2r+1)\ldots\ldots(nr+1)}{(r-1)(2r-1)(3r-1)\ldots\ldots[(n+1)r-1]}\left[\frac{x^r-1}{x-1}\right]^{2n+1}$$

Durch Anwendung der Formeln (7) und (18) erhalten wir die für das Folgende wichtige Gleichungen:

$$(26)\ldots\ldots \quad U_n(1) = (2r)^n\,\frac{1.\ \ 3.\ \ 5\ldots\ldots\ldots(2n-1)}{(r-1)(2r-1)\ldots\ldots(rn-1)} = W_n(1)$$

$$(27)\ldots\ldots \quad R_n(1) = \left(\frac{r}{2}\right)^n\,\frac{1.\,(r+1)(2r+1)\ldots\ldots(rn+1)}{1.\ \ 3.\ \ 5.\ \ldots\ldots\ldots(rn+1)}$$

Wir bemerken beiläufig, dass man aus (7), (9) und (16) in derselben Weise ähnliche Formeln wie (26) und (27) entwickeln kann.

Ist z. B.

$$\varrho^r + 1 = 0$$

bekommen wir aus (16) und (7)

$$R_{n+2}(\varrho) = -4\,\frac{r(n+1)+1}{r(n+2)-1}\,\frac{R_n(\varrho)}{(\varrho-1)^4}$$

$$U_{n+2}(-1) = -4\,\frac{r(n+1)+1}{r(n+2)-1}\,U_n(-1)$$

$$U_{2n}(-1) = (-4)^n\,\frac{(r+1)(3r+1)\ldots\ldots[(n-1)r+1]}{(2r+1)(4r-1)\ldots\ldots(2nr-1)}$$

$$U_{2n+1}(-1) = (-4)^n\,2\,\frac{(2r+1)(4r+1)\ldots\ldots(2nr+1)}{(r-1)(3r-1)\ldots\ldots[(2n+1)r-1]}$$

Für ungerades r erhält man

$$R_{2n}(-1) = (-\tfrac{1}{4})^n \frac{(r+1)(3r+1)\ldots\ldots[(2n-1)r+1]}{(2r-1)(4r-1)\ldots\ldots(2nr-1)}$$

$$R_{2n+1}(-1) = 0$$

Ist

$$\frac{\varepsilon^r - 1}{\varepsilon - 1} = 0$$

so wird

$$R_n(\varepsilon) = \frac{2r(2n-1)}{rn-1} \frac{R_{n-1}(\varepsilon)}{(\varepsilon-1)^2} = \frac{U_n(1)}{(\varepsilon-1)^{2n}}$$

Man merke sich endlich die Gleichung

$$(28)\ldots\ldots \left[x U_n(x^r)\right]^r - \left[W_n(x^r)\right]^r = \left[x^r - 1\right]^{2n+1} \cdot R_n(x) R_n(\varepsilon x) \ldots R_n(\varepsilon^{r-1} x)$$

wo r eine ungerade Zahl ist, während ε eine primitive Wurzel, der Funktion

$$\frac{\varepsilon^r - 1}{\varepsilon - 1}$$

bedeutet.

Satz 11.

Sind h nnd k in der Gleichung

$$(29)\ldots\ldots \quad \frac{h}{k} = \frac{(r-1)(2r-1)(3r-1)\ldots\ldots(nr-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n}$$

positive relative Primzahlen zu einander, so müssen sämtliche Koeffizienten der Funktionen $h U_n(z)$ und $h W_n(z)$ ganze positive Zahlen sein.

Ausserdem wird ferner

$$h < (r 2^\alpha)^n$$

wo α die Anzahl der verschiedenen Primzahlfaktoren von r bezeichnen soll.

Um dieses zu beweisen wollen wir zuerst zeigen — was schon bekannt ist — dass r immer durch jeden Primfaktor von k teilbar ist.

Es seien nun a und b zwei beliebige positive oder negative ganze Zahlen und m eine beliebige ganze positive Zahl.

Ist dann r nicht durch eine Primzahl q teilbar, so behaupten wir mehr allgemein, dass man im Bruche

$$\frac{[r(a)+b]\,[r(a+1)+b]\,[r(a+2)+b]\,\ldots\ldots\,[r(a+m-2)+b]\,[r(a+m-1)+b]}{1\;.\;2\;.\;3\,\ldots\ldots\ldots\ldots\,(m-1)\;.\;m}$$

zu jedem Parenthesfaktor cq^y des Nenners, wo c nicht durch q teilbar ist, immer einen solchen Parenthesfaktor $r(a+d)+b$ des Zählers zuordnen kann, dass $r(a+d)+b$ durch q^y teilbar wird, und so, dass alle die auf diese Weise zu den oben erwähnten Nennerfaktoren entsprechenden Faktoren des Zählers sämtlich verschieden werden.

Wir wollen zuerst annehmen, dass

$$m = q^\gamma$$

Wir können nun eine solche Zahl s finden, dass $as+b$ durch q^γ teilbar ist. Unsere Behauptung muss dann folglich richtig sein, wenn

$$a = s$$

Ist $y \overline{\lessgtr} \gamma$ muss nämlich in diesem Falle

$$r(a+cq^y)+1 = (ra+1)+cq^y$$

immer durch q^y teilbar sein.

Ist indessen der Satz richtig für einen Wert von a, wenn $m = q^\gamma$, so muss er auch richtig sein, wenn a um eine Einheit vermindert wird und folglich auch richtig sein für alle ganzen Werte von a.

Entspricht nämlich im oben erwähnten Sinne der Zählerfaktor

$$r[a+m-1]+1$$

im Bruche

$$\frac{[r(a)+b]\,\ldots\ldots\,[r(a+m-1)+b]}{1.\;2.\;3\,\ldots\ldots\,(m)}$$

einem Faktor cq^y des Nenners, so dass also $r(a+m-1)+b$ durch q^y teilbar ist, so kann man im Brüche

$$\frac{[r(a-b)+b]\,\ldots\ldots\,[r(a+m-2)+b]}{1.\;2.\;3\,\ldots\ldots\,(m)}$$

dem genannten Nennerfaktor cq^y den Zählerfaktor $r(a-1)+b$ im obigen Sinne zuordnen.

Denn

$$r(a-1)+b = r(a+m-1)+b+mr$$

wird ja durch q^y teilbar sein.

Ist endlich m keine Potenz von q bewährt der Satz seine Gültigkeit. Gilt nämlich der Satz, wenn $m \leqq q^\gamma$, so muss er auch gelten, wenn

$$q^\gamma < m < q^{\gamma+1}$$

Im Bruche

$$\frac{(rs+b)(r(s+1)+b) \; . \; . \; . \; . \; (r(s+t-1)+b)}{(q^\gamma+1)(q^\gamma+2) \; . \; . \; . \; . \; . \; (q^\gamma+t)}$$

wo

$$q^\gamma + t < q^{\gamma+1}$$

wird ja jeder Faktor $q^\gamma + \mu$ des Nenners die Form $c' q^y$ haben, wenn $\mu = cq^y$, indem c' und c nicht durch q teilbar sind.

Hiermit ist unser Hülfssatz bewiesen.

Man sieht z. B. dass

$$h > \frac{r-1}{n} \cdot r^{n-1}$$

Wir können nun leicht nachweisen, dass sämtliche Koeffizienten von hU_n und hW_n ganze Zahlen sein müssen.

Der Koeffizient von z^{n-m} in z. B. $hU_n(z)$ wird ja gleich

$$T_m = \binom{n}{m} \frac{(rn+1) \; . \; . \; . \; . \; . \; [r(n-m+1)+1]}{(r-1) \; . \; . \; . \; . \; . \; (mr-1)} \cdot \frac{(r-1) \; . \; . \; . \; . \; . \; (nr-1)}{1. \; 2. \; . \; . \; . \; . \; n} \; k =$$

$$= \frac{(rn+1) \; . \; . \; . \; . \; . \; [r(n-m+1)+1]}{1. \; 2. \; 3 \; . \; . \; . \; . \; . \; m} \cdot \frac{(nr-1) \; . \; . \; . \; [r(m+1)-1]}{1. \; 2. \; 3 \; . \; . \; . \; . \; (n-m)} \; k$$

Wir bekommen also

$$T = \frac{A}{a} \cdot \frac{B}{b} \; k$$

wo

$$\frac{A}{a} = \frac{(rn+1) \; . \; . \; . \; [r(n-m+1)+1]}{1. \; 2. \; 3 \; . \; . \; . \; m}$$

$$\frac{B}{b} = \frac{(nr-1) \; . \; . \; . \; . \; [r(m+1)-1]}{1. \; 2. \; 3 \; . \; . \; . \; (n-m)}$$

während r durch jeden Primfaktor von ab teilbar ist.

Setzen wir nun

$$1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots n = kC$$
$$1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots m = aD$$
$$1.\ 2.\ 3 \ldots\ldots (n-m) = bE$$

so wird

$$\frac{kC}{aD \, . \, bE}$$

eine ganze Zahl sein.

Da $(r-1)(2r-1)\ldots(rn-1)$ und r relative Primzahlen sind und also auch r und C, muss k durch ab teilbar sein.

Der Koeffizient T_m wird folglich, wie behauptet, immer eine ganze Zahl.

Ist q eine beliebige Primzahl, und q^s die höchste Potenz von q, welche in der Fakultät $1.\ 2.\ 3 \ldots . n$ aufgeht, dann ist, wie bekannt

$$s < \frac{n}{q}\left[1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots\right] = \frac{n}{q-1}$$

oder

$$q^s < q^{\frac{n}{q-1}} = [1+(q-1)]^{\frac{n}{q-1}} \leqq 2^n$$

oder

$$k < 2^{\alpha n}$$

Da endlich

$$\frac{(r-1)(2r-1)(3r-1)\ldots . (nr-1)}{1.\quad 2.\quad 3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad n} = \left(r - \frac{1}{1}\right)\left(r - \frac{1}{2}\right)\left(r - \frac{1}{3}\right)\ldots . \left(r - \frac{1}{n}\right) < r^n$$

ist somit der Nachweis für die Richtigkeit des Satzes (10) geliefert.

Wir werden nun zeigen, wie man mit Hülfe der gewonnenen Sätze rationale Näherungsgrössen für die r'te Wurzel einer rationalen Grösse finden kann.

§ 5.

Indem

$$x^r = \frac{a}{b}$$

wo a und b zwei beliebige positive relative Primzahlen sind, setzen wir in der Gleichung (14) anstatt x überall $\frac{q}{p}x$, und erhalten wir dann

$$\frac{q}{p} x U_n \left[\frac{a}{b}\left(\frac{p}{q}\right)^r\right] - W_n\left[\frac{a}{b}\left(\frac{q}{p}\right)^r\right] = \left(\frac{q}{p} x - 1\right)^{2n+1} R_n\left(\frac{q}{p} x\right)$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $h b^n p^{nr+1}$, wo h durch (29) definiert ist, bekommt man die neue Gleichung

$$(30) \ldots\ldots \quad q P_n(p^r, q^r) x - p Q_n(p^r, q^r) = b^n (qx - p)^{2n+1} S_n(p, q)$$

wo $P_n(p^r, q^r)$ und $Q_n(p^r, q^r)$ in Bezug auf p^r und q^r ganze homogene Funktionen vom n'ten Grade mit ganzzahligen Koeffizienten werden, während $S_n(p, q)$ in Bezug auf p und q eine ganze homogene Funktion des $(r-2)\,n$'ten Grades wird.

Da sämtliche Koeffizienten von U_n, W_n und R_n positiv sind, liegt jeder der ganzen Zahlen P_n und Q_n zwischen den Grenzen

$$h b^n U_n(1) p^{rn} \quad \text{und} \quad h b^n U_n(1) (xq)^{rn}$$

während S_n zwischen den Grenzen

$$h R_n(1) p^{(r-2)n} \quad \text{und} \quad h R_n(1) (qx)^{(r-2)n}$$

liegen muss.

Da

$$\frac{2m-1}{rm-1} \gtreqless \frac{2}{r}$$

$$\frac{rm+1}{2m+1} \gtreqless \frac{r}{2}$$

wenn $r \geqq 2$, so erhalten wir aus (26) und (27)

$$U_n(1) \leqq 4^n$$

$$R_n(1) \gtreqless \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \qquad \ldots\ldots (31)$$

je nach $r \gtreqless 2$ ist.

Ferner erhält man aus (25')

$$U_n(1) R_{n-1}(1) = 2 \frac{(r+1)(2r+1) \ldots\ldots [(n-1)r+1]}{(r-1)(2r-1) \ldots\ldots (nr-1)} r^{2n-1}$$

oder

$$U_n(1) R_{n-1}(1) > \frac{2}{nr-1} r^{2n-1} > \frac{2}{n} r^{2(n-1)}$$

oder nach (31)

$$4^n \gtreqless U_n(1) > \frac{1}{2n} 4^n \qquad \ldots\ldots (32)$$

Wählen wir nun für $\frac{p}{q}$ einen beliebigen der Näherungswerte, die man durch Entwicklung von x in einen Kettenbruch erhält, so wird

$$qx - p = \frac{\delta}{q} \qquad (33)$$

wo

$$|\delta| < 1$$

Wir haben somit folgenden Hauptsatz gewonnen.

Theorem I.

Bedeutet $\frac{p}{q}$, *indem* p *und* q *relative positive Primzahlen sind, einen beliebigen der Näherungsbrüche von* x, *die man durch Entwickelung von* x *in einen Kettenbruch erhält, und ist* $x^r = \frac{a}{b}$, *wo* a *und* b *beliebige relative positive Primzahlen sind, während*

$$A_n = qP_n(p^r, q^r)$$
$$B_n = pQ_n(p^r, q^r)$$
$$C_n = b^n(qx-p)^{2n+1} S_n(p, q)$$

dann müssen in der Gleichung

$$A_n x - B_n = C_n \qquad (34)$$

A_n *und* B_n *solche ganze Zahlen sein, dass* A_n *kleiner wird als die grösste der Zahlen*

$$(2^{\alpha+2} rb)^n (p)^{rn} q \quad \textit{und} \quad (2^{\alpha+2} rb)^n (xq)^{rn} q$$

während C_n *kleiner wird als die grösste der Zahlen*

$$(2^{\alpha-2} br^3)^n \frac{p^{(r-2)n}}{q^{2n+1}} \quad \textit{und} \quad (2^{\alpha-2} br^3)^n \frac{(qx)^{(r-2)n}}{q^{2n+1}}$$

Ferner wird $A_n C_n$ *in der Gleichung*

$$A_n x - B_n = \frac{A_n C_n}{A_n}$$

kleiner sein als die grösste der Zahlen

$$\left[(2^\alpha br^2)^n \frac{p^{n(r-1)}}{q^n}\right]^2 \quad \textit{und} \quad \left[(2^\alpha br^2)^n \frac{(qx)^{n(r-1)}}{q^n}\right]^2$$

§ 6.

Theorem II.

Bezeichnet r eine beliebig gegebene ganze positive Zahl, die aber grösser als 2 ist, und ferner a, b und c drei andere beliebig gegebene ganze positive Zahlen, von denen $c \gtrless 0$, dann kann man nicht unendlich viele Paare von solchen ganzen positiven Zahlen p und q finden, dass sie der Gleichung

$$bp^r - aq^r = c \qquad \ldots\ldots (35)$$

Genüge leisten.

Die Gleichung hat anders gesagt nur eine begrenzte Anzahl Lösungen von ganzen Zahlen p, q.

Aus zwei Lösungen $(p_{,}\, q_{,})$ und $(p_{,,}\, q_{,,})$ der Gleichung (35) erhalten wir erstens

$$q_{,}\sqrt[r]{\frac{a}{b}} - p_{,} = -\frac{\delta' \frac{c}{ra}\sqrt[r]{\frac{a}{b}}}{q_{,}^{r-1}} = -\frac{\delta' f}{q_{,}^{r-1}}$$

$$q_{,,}\sqrt[r]{\frac{a}{b}} - p_{,,} = -\frac{\varepsilon' \frac{c}{ra}\sqrt[r]{\frac{a}{b}}}{q_{,,}^{r-1}} = \frac{\varepsilon' f}{q_{,,}^{r-1}}$$

oder

$$q_{,}x - p_{,} = -\frac{\delta' f}{q_{,}^{r-1}}$$

$$q_{,,}x - p_{,,} = -\frac{\varepsilon' f}{q_{,,}^{r-1}}$$

$$0 < \delta' < 1 \qquad\qquad 0 < \varepsilon' < 1$$

$$q_{,}p_{,,} - p_{,}q_{,,} = \left(\frac{\varepsilon' q_{,}}{q_{,,}^{r-1}} - \frac{\delta' q_{,,}}{q_{,}^{r-1}}\right)f \quad \text{ɔ:}\ fq_{,,} > q_{,}^{r-1}$$

Um einfachere Formeln zu bekommen, benutzen wir doch lieber die Gleichungen

$$q_{,} x - p_{,} = - \frac{\delta \frac{c}{b}}{p_{,}^{r-1}} \qquad \ldots\ldots (36)$$

$$q_{,,} x - p_{,,} = - \frac{\varepsilon \frac{c}{b}}{p_{,,}^{r-1}} \qquad \ldots\ldots (37)$$

$$0 < \delta < 1 \qquad\qquad 0 < \varepsilon < 1$$

Wir wollen annehmen, dass $q_{,,} > q_{,}$
Setzen wir nun in (34)

$$p = p_{,} \quad \text{und} \quad q = q_{,}$$

so erhalten wir eine Gleichung

$$A_n x - B_n = C_n \qquad \ldots\ldots (38)$$

wo A_n und B_n solche ganze positive Zahlen sind, dass

$$A_n < (2^{\alpha + 2} rb)^n (p_{,})^{rn} . q_{,} \qquad \ldots\ldots (39)$$

während

$$| C_n < \frac{\frac{c}{b}\left[2^{\alpha - 2} . r^3 \frac{c^2}{b}\right]^n}{p_{,}^{rn+r-1}} \qquad \ldots\ldots (40)$$

Durch Anwendung der Gleichungen (37) und (38) erhalten wir aber

$$A_n \left[\frac{p_{,,}}{q_{,,}} - \frac{\varepsilon \frac{c}{b}}{q_{,,} p_{,,}^{r-1}}\right] - B_n = C_n$$

oder

$$(41) \ldots\ldots \qquad A_n p_{,,} - B_n q_{,,} = \frac{\varepsilon \frac{c}{b} A_n}{p_{,,}^{r-1}} + C_n q_{,,}$$

Es fragt sich nun, ob Werte für n existieren, bei welchen

$$\frac{\frac{c}{b} A_n}{p_{,,}^{r-1}} < 1 \qquad \ldots\ldots (42)$$

$$| C_n q_{,,} | < 1 \qquad \ldots\ldots (43)$$

Es muss dann

$$A_n p_{,,} - B_n q_{,,} = 0$$

oder

$$\frac{p_{,,}}{q_{,,}} = \frac{B_n}{A_n} \qquad \ldots\ldots(44)$$

Die Bedingungen (42) und (43) werden aber erfüllt, wenn

$$\frac{c}{b}(2^{\alpha+2} rb)^n (p_,)^{rn} q_, < p_{,,}^{r-1}$$

$$\frac{c}{b}\left[2^{\alpha-2} r^3 \frac{c^2}{b}\right]^n \cdot q_{,,} < p_,^{rn+r-1}$$

oder wenn

$$\log\frac{c}{b} + n\log(2^{\alpha+2} rb) + rn\log p_, + \log q_, < (r-1)\log p_{,,}$$

$$\log\frac{c}{b} + n\log\left(2^{\alpha-2} r^3 \frac{c^2}{b}\right) + \log q_{,,} < (rn + r - 1)\log p_,$$

oder wenn

$$n\,[\log(2^{\alpha+2} rb) + r\log p_,] < (r-1)\log p_{,,} - \log q_, - \log\frac{c}{b}$$

$$n\left[r\log p_, - \log(2^{\alpha-2} r^3 \frac{c}{b})\right] > \log q_{,,} - (r-1)\log p_, + \log\frac{c}{b}$$

oder wenn

$$\psi = \frac{\log q_{,,} - (r-1)\log p_, + \log\frac{c}{b}}{r\log p_, - \log(2^{\alpha-2} r^3 \frac{c^2}{b})} < n < \frac{(r-1)\log p_{,,} - \log q_, - \log\frac{c}{b}}{r\log p_, + \log(2^{\alpha+2} rb)} = \varphi \quad \ldots(45)$$

Da $q_{,,}x < p_{,,}$ kann man folglich, wenn

$$r > 2$$

eine so grosse Zahl β finden, dass φ und ψ sowohl als die Differenz $\varphi - \psi$ beider dieser Grenzen grösser als eine beliebig gewählte Grösse γ werden, wenn

$$\frac{q_{,,}}{q_,} > \beta$$

Setzt man z. B. $\gamma = 3$, wird die Bedingung (45) durch mindestens zwei Werte m und $m+1$ von n erfüllt sein

Wir bekommen dann

$$\frac{B_m}{A_m} = \frac{p_{,,}}{q_{,,}} = \frac{B_{m+1}}{A_{m+1}}$$

Da dies infolge der Gleichung (25) unmöglich ist, wenn $c \gtrless 0$, ist somit unseres Fundamentaltheorem bewiesen.

Wir bemerken, dass man durch (25) auch die Unmöglichkeit der Gleichung (44) nachweisen kann, selbst wenn es zwischen den zwei Grenzen nur eine einzige Zahl n lag.

Wenn α eine beliebig gegebene positive Grösse bedeutet, so existiert nach unserem Theorem II eine so grosse positive Grösse β, dass wenn eine der ganzen Zahlen p und q grösser als β wird, so muss immer der absolute Wert von

$$aq^r - bp^r$$

wo a b r ganze positive Zahlen sind, und $r > 2$, grösser als α sein.

Durch die obenstehenden Betrachtungen können wir selbstverständlich obere Grenzen für die Zahlen $q_,$ und $q_{,,}$ finden, wenn sie die Gleichung (35) erfüllen sollen.

Mehr allgemein können wir sagen, dass die Gleichung (45) unmöglich ist in ganzen positiven Zahlen a, b, c, p, q und r, wenn

$$\psi - \varphi > 3$$

Wie im § 2 angedeutet, kann man das Theorem II weiter ausdehnen. Wir wollen aber dies bei einer anderen Gelegenheit zeigen.

Satz 12.

Bedeutet h eine beliebig gegebene positive Zahl und k eine beliebig gegebene positive oder negative von Null verschiedene ganze Zahl, so existiert eine so grosse ganze positive Zahl n, dass wenigstens eines der zwei Produkten

$$a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, a_n$$

und

$$[a_1 + k] \,.\, [a_2 + k] \,.\, [a_3 + k] \,.\, .\, .\, .\, .\, .\, [a_n + k]$$

wo a_1, a_2 .... a_n n beliebige ganze verschiedene Zahlen bedeuten, durch ein Produkt aus mehr als h verschiedencn Primzahlen teilbar wird.

Wenn nämlich dies nicht richtig wäre, so könnte man unendlich viele solche Lösungen a, b, der Gleichung

$$a - b = k$$

finden, dass ab nur eine begrenzte Anzahl verschiedener Primzahlfaktoren enthielt.

Aber dann erhielt man unendlich viele ganzzähligen Lösungen, (x, y) einer Gleichung

$$\alpha x^3 - \beta y^3 = k.$$

wo α und β zwei konstante ganze Zahlen waren.

Dieser Satz kann als eine Generalisation eines Theorems von C. Størmer aufgefasst werden. Er hat nämlich denselben Satz in einer anderen Form bewiesen für den Fällen, dass $k = 1$ und $k = 2$.*

§ 7.

Durch wiederholte Derivation der Gleichung (14) erhält man neue Gleichungen derselben Art.

So z. B.

$$x^\beta \cdot \frac{d^{\alpha r+\beta}}{dx^{\alpha r+\beta}} \left[x U_n(x^r) - W_n(x^r) \right] =$$

$$= xM(x^r) - N(x^r) = (x-1)^{2n+1-(\alpha r+\beta)} S(x)$$

$M(z)$ und $N(z)$ werden in Bezug auf z vom Grade $n - \alpha$, und $S(x)$ vom Grade $(r-2)n + \beta$ in Bezug auf x.

Wir wollen genauer den Fall $\alpha = 0$, $\beta = 1$ behandeln.

Wir setzen wie früher

$$z = x^r$$

und bekommen dann

$$2x \frac{d}{dx} \left[x U_n(z) - W_n(z) \right] = x \left[2 U_n(z) + 2rz \frac{d U_n(z)}{dz} \right] - 2rz \frac{d W_n(z)}{dz}$$

$$= 2x \frac{d}{dx} \left[(x-1)^{2n+1} R_n(x) \right] = 2x \,.\, (x-1)^{2n} \left[(2n+1) R_n(x) + (x-1) R_n'(x) \right]$$

* Siehe: Sur une équation indéterminée, Comptes Rendus, Paris, 14 November 1898.

oder nach (12), (13) und (20)

$$x\,[U_n(z) + (z-1)\,U_{n-1}(z)] - [W_n(z) + (z-1)\,W_{n-1}(z)] =$$

$$= (x-1)^{2n}\left[(x-1)\,R_n(x) + \frac{x^r-1}{x-1}\,R_{n-1}(x)\right]$$

Diese Gleichung kann auch als eine Summe zweier Gleichungen (14) aufgefasst werden, nachdem die eine Gleichung durch $(z-1)$ multipliziert wird.

Mehr allgemein hat man

$$x\,[A(z)\,U_n(z) - B(z)\,U_{n-1}(z)] - [A(z)\,W_n(z) - B(z)\,W_{n-2}(z)] =$$

$$= (x-1)^{2n-1}\,[(x-1)^2\,A(z)\,R_n(x) - B(z)\,R_{n-1}(x)] \qquad \ldots . (46)$$

Indem man oben statt der Summe die Differenz nehmen kann, erhält man somit die zwei Gleichungen

(47) .... $$x\,[U_n + (z-1)\,U_{n-1}] - [W_n + (z-1)\,W_{n-1}] = (x-1)^{2n}\left[(x-1)\,R_n(x) + \frac{z-1}{x-1}\,R_{n-1}(\right.$$

(48) .... $$x\,[U_n - (z-1)\,U_{n-1}] - [W_n - (z-1)\,W_{n-1}] = (x-1)^{2n}\left[(x-1)\,R_n(x) - \frac{z-1}{x-1}\,R_{n-1}(\right.$$

wo

(49) .... $$[U_n + (z-1)\,U_{n-1}]\,[W_n - (z-1)\,W_{n-1}] - [U_n - (z-1)\,U_{n-1}]\,[W_n + (z-1)\,W_{n-}$$

$$= 2\,(z-1)\,[W_n\,U_{n-1} - U_n\,W_{n-1}] = 4\,\frac{(r+1)\,(2r+1)\,\ldots\,[r(n-1)+1]}{(r-1)\,(2r-1)\,\ldots\,(rn+1)}\,(z-1)$$

Sind a und b zwei beliebige ganze Zahlen, so erhält man aus (47) und (48)

$$x\,[(a+b)\,U_n + (a-b)\,(z-1)\,U_{n-1}] - [(a+b)\,W_n + (a-b)\,(z-1)\,W_{n-1}]$$

$$= [x-1]^{2n}\left[(a+b)\,(x-1)\,R_n(x) + (a-b)\,\frac{z-1}{x-1}\,R_{n-1}(x)\right]$$

Wir verzichten darauf, eine eingehende Behandlung dieser Gleichung zu geben, wenn n beliebig ist und begnügen uns mit dem einfachen

Falle, da $n = 1$, $r = 3$ und $x^3 = k$. Schreiben wir überall $\frac{qx}{p}$ statt x, erhalten wir hier die Gleichungen

$$[3p^2(ap - bq) + 2a(kq^3 - p^3)]\,x - [3kq^2(ap - bq) + 2b(kq^3 - p^3)] =$$

$$= \frac{2(qx + p)(ax + b) - (ap + bq)\,x}{(qx - p)^2} \quad \ldots\ldots (50)$$

$$[3p^2(ap - bq) + 2a(kq^3 - p^3)]\,p - [3kq^2(ap - bq) + 2b(kq^3 - p^3)]\,q = (bq - bp)(kq^3 - p^3)$$

Hat der Bruch $\frac{p}{q}$ die frühere Bedeutung, kommt man aus (50) zu wichtigen Annäherungswerten von x, wenn $\frac{b}{a}$ oder $-\frac{b}{a}$ auch einen durch Kettenbruchentwicklung von x erhaltenen Näherungswert von x bedeutet. Besonders einfach wird die Sache, wenn ausserdem

$$|ap - bq| \quad \text{oder} \quad |ap + by|$$

gleich eins wird.

Nordstrand, d. 18. November 1907.

Axel Thue.

Anhang.

Wir können auch unser obenstehendes Haupttheorem (II) auf die Fermat'sche Gleichung und auf andere ähnliche Gleichungen anwenden.

Bedeutet n eine ganze Zahl grösser als 2 und k und h gegebene ganze — von Null verschiedene — positive Zahlen, so werden z. B. die Gleichungen

$$x^n + (x + k)^n = y^n \quad \ldots\ldots (a)$$

$$x^2 - h^2 = ky^n \quad \ldots\ldots (b)$$

$$(x + h)^3 + x^3 = ky^n \quad \ldots\ldots (c)$$

$$(x + h)^4 - x^4 = ky^n \quad \ldots\ldots (d)$$

etc.

in grossen positiven ganzen Zahlen x und y unmöglich.

Aus (a) erhält man nämlich:

$$y^n - (x+k)^n = (y-x-k)\,[y^{n-1} + \cdots\cdots + (x+k)^{n-1}] = x^n$$

$$y^n - x^n = (y-x)\,[y^{n-1} + \cdots\cdots + x^{n-1}] = (x+k)^n$$

oder

$$y - x - k = \alpha p^n$$

$$y - x = \beta q^n$$

oder

$$\beta q^n - \alpha p^n = k$$

wo p, q, α und β ganze positive Zahlen sind, während α und β kleiner als eine gewisse durch n und k bestimmte Zahl werden.

Aus (b) erhält man

$$(x+h)(x-h) = ky^n$$

oder

$$x + h = \alpha p^n$$

$$x - h = \beta q^n$$

oder

$$\alpha p^n - \beta q^n = 2h$$

Aus (c) erhält man ferner

$$(2x+h)\,[x^2 + hx + h^2] = ky^n$$

oder

$$2x + h = \alpha p^n$$

$$x^2 + hx + h^2 = \beta q^n$$

oder

$$4\beta q^n - \alpha^2 [p^2]^n = 3h^2$$

Endlich erhält man aus (d)

$$h\,[2x^2 + 2hx + h^2]\,[2x+h] = ky$$

oder

$$2x + h = \alpha p^n$$

$$2x^2 + 2hx + h^2 = \beta q^n$$

oder

$$2\beta q^n - \alpha^2 [p^2]^n = h^2$$

etc.

A. T.

Gedruckt 30. December 1908.